

ΜΕΡΟΣ

Ατριβείς Ασυμπίεστες Ροές



Το **2^ο Μέρος** του βιβλίου πραγματεύεται τις ασυμπίεστες ροές, δηλαδή εκείνες που χαρακτηρίζονται από σταθερή πυκνότητα του ρευστού. Τέτοιες ροές είναι αυτές των υγρών και οι ροές χαμηλής ταχύτητας των αερίων. Το υλικό που θα παρουσιάσουμε εδώ άπτεται του ενδιαφέροντος των πτήσεων χαμηλών ταχυτήτων στην ατμόσφαιρα, υπό συνθήκες αριθμού Mach όχι άνω του 0,3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Βασικές Αρχές των Ατριβών Ασυμπίεστων Ροών



Η θεωρητική Μηχανική των Ρευστών, που αποτελεί μια σαφώς δύσκολη επιστήμη, κατά κανόνα και για λόγους απλότητας «διαχωρίζεται» σε δύο κλάδους, εκ των οποίων ο ένας μελετά τα ατρίβη ρευστά και ο άλλος τα πραγματικά ρευστά. Στη φύση δεν υπάρχουν ατρίβη ρευστά· αυτά αποτελούν μια ιδεατή κατάσταση, μέσω της οποίας διευκολύνεται η διατύπωση σημαντικών νόμων και αρχών, που ίσως να μπορούν προσεγγιστικά να διέπουν και τις ροές των πραγματικών ρευστών.

Albert F. Zahm, 1912

*Καθηγητής Αεροναυπηγικής, ιδρυτής του πρώτου
Εργαστηρίου Αεροναυπηγικής σε ανώτατο εκπαιδευτικό
ίδρυμα των Η.Π.Α. (The Catholic University of America)*

Εισαγωγικό σημείωμα

Και συνεχίζουμε: αρχές... ακόμα περισσότερες αρχές! Σε αυτό, ωστόσο, το κεφάλαιο θα εστιάσουμε στις θεμελιώδεις αρχές μιας ειδικής κατηγορίας ροών και συγκεκριμένα των ατρίβων ασυμπίεστων ροών. Στην πραγματικότητα, τέτοιες ροές δεν υπάρχουν, πρώτον διότι στη φύση υφίσταται πάντα (περισσότερο ή λιγότερο) κάποια τριβή, δεύτερον διότι κάθε ροή είναι λιγότερο ή περισσότερο συμπίεστη. Αν, όμως, οι μηχανικοί έπρεπε πάντοτε να προσεγγίζουν τα πάντα με τόσο απόλυτη αυστηρότητα, τότε δεν θα ήταν σε θέση να μελετήσουν και να αναλύσουν το οτιδήποτε. Όσο συνεχίζετε τις σπουδές σας, τόσο περισσότερο θα ανακαλύπτετε ότι σχεδόν κάθε τεχνική ανάλυση εμπεριέχει κάποιες προσεγγίσεις εις ότι αφορά στη φυσική που ενσωματώνει.

Σύμφωνα με το υλικό που θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο αυτό, υπάρχει μια πληθώρα εφαρμογών της Αεροδυναμικής που ενσωματώνουν σχεδόν ατρίβεις και ασυμπίεστες ροές, ώστε η παραδοχή αυτή να μας οδηγεί σε εκπληκτικής ακρίβειας αποτελέσματα. Θα μελετήσουμε, λοιπόν, το πώς λειτουργεί μια αεροδυναμική σήραγγα χαμηλών ταχυτήτων και το πώς μπορούμε να μετρήσουμε την ταχύτητα μιας ροής χαμηλών ταχυτήτων με τη βοήθεια ενός μάλλον απλού οργάνου, του σωλήνα Pitot. Με τέτοιους σωλήνες είναι εξοπλισμένα σχεδόν όλα τα αεροπλάνα, ώστε να προσδιορίζεται η ταχύτητα της πτήσης τους· το όργανο αυτό, λοιπόν, είναι τόσο σημαντικό όσο το ταχύμετρο του αυτοκινήτου σας. Επίσης, θα μάθουμε γιατί το μπαλάκι του μπέιζμπολ διαγράφει καμπύλη τροχιά, όταν ο πίτσερ εκτελεί βολή με συστροφή και γιατί το μπαλάκι του γκολφ κάνει «φάλτσο», ανάλογα με τον τρόπο χτυπήματός του.

Και οι εφαρμογές δεν τελειώνουν ποτέ... Ως βασική αρχή, θα μάθουμε την εξίσωση του Bernoulli, την πλέον γνωστή εξίσωση της Μηχανικής των Ρευστών, η οποία συσχετίζει την πίεση και την ταχύτητα μεταξύ δύο σημείων μιας ατρίβους ασυμπίεστης ροής. Επίσης, θα μπορούμε να προσδιορίζουμε τη ροή γύρω από ένα κυκλικού σχήματος σώμα και πώς να χαράσσουμε τις ροϊκές γραμμές αυτής της ροής· ίσως αυτό φαντάζει απλοϊκό, όμως είναι σημαντικό στην όλη ροή της μελέτης της Αεροδυναμικής.

Το κεφάλαιο αυτό, λοιπόν, αποτελεί μια μείξη αρχών και εφαρμογών· σας αποκαλύπτουμε εκ των προτέρων ότι όλα θα είναι πολύ ενδιαφέροντα!

3.1. Εισαγωγή – Οδικός Χάρτης

Για την αεροπλοΐα, όλα άρχισαν στις 10³⁵ της 17^{ης} Δεκεμβρίου 1903, όταν, υπό την επήρεια ενός παγωμένου και ισχυρού ανέμου, ο Orville Wright εκτέλεσε μια πτήση διάρκειας 12'' σε μήκος 36 ft. Στην Εικόνα 3.1 δίνεται μια φωτογραφία του Wright Flyer κατά τη στιγμή της απογείωσής του, με τον Wilbur Wright να τρέχει παράλληλα προς τη δεξιά πλευρά του σκάφους, ώστε το ακροπτερύγιο να μην έρθει σε επαφή με το έδαφος. Πρόκειται για τη σημαντικότερη φωτογραφία στην ιστορία της αεροπλοΐας, μια και το γεγονός αυτό αποτέλεσε την απαρχή του επαγγέλματος του Αεροναυπηγού Μηχανικού και την καθιέρωσή του κατά τον 20ό αιώνα¹.

Η ταχύτητα που μπορούσε να επιτύχει το Wright Flyer ανερχόταν σε περίπου 48 km/h· μέσα στις επόμενες δεκαετίες, οι ταχύτητες των αεροσκαφών θα αυξάνονταν γοργά. Με τη βοήθεια ισχυρότερων κινητήρων και με έμφαση στη μείωση της οπισθέλκουσας, τα αεροσκάφη κατά τις απαρχές του 2^{ου} Παγκοσμίου πολέμου μπορούσαν να επιτυγχάνουν ταχύτητες της τάξης των 500 km/h περίπου: στην Εικόνα 3.2 δίνεται ένα τυπικό πολεμικό αεροσκάφος της εποχής εκείνης. Από μια αεροδυναμική σκοπιά, υπό ταχύτητες πτήσεις μεταξύ 0 km/h και 500 km/h, η πυκνότητα του αέρα παραμένει ουσιαστικώς σταθερή (για την ακρίβεια, μεταβάλλεται πολύ λίγο). Έτσι, η αεροδυναμική συμπεριφορά των αεροσκαφών που κατασκευάζονταν για όλο αυτό το διάστημα (που «οριοθετείται» από τα αεροσκάφη των Εικόνων 3.1 και 3.2) ήταν συμπεριφορά *ασυμπίεστων ροών*, με αποτέλεσμα ένα μεγάλο μέρος της θεωρητικής και πειραματικής Αεροδυναμικής για περίπου 40 χρόνια μετά από την πρώτη πτήση του Wright Flyer να αποσκοπεί στη μελέτη των ασυμπίεστων ροών. Ακόμα και σήμερα, όμως, οι ασυμπίεστες ροές παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον, μια και τα περισσότερα σύγχρονα αεροσκάφη γενικής αεροπλοΐας δεν επιτυγχάνουν ταχύτητες υψηλότερες των 500 km/h· ένα τέτοιου τύπου ελαφρύ αεροσκάφος δίνεται στην Εικόνα 3.3. Πέραν των αεροναυπηγικών εφαρμογών χαμηλών ταχυτήτων, οι ασυμπίεστες ροές καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών της Μηχανικής των Ρευστών (π.χ. ροή υγρών σε σωληνώσεις, πλεύση υποβρυχίων και πλοίων στη θάλασσα, σχεδιασμός ανεμογεννητριών κ.λπ.).

Για όλους αυτούς τους λόγους, η μελέτη των ασυμπίεστων ρευστών είναι το ίδιο καίρια στις μέρες μας, όσο και στην εποχή των αδελφών Wright και για ακριβώς αυτό τον λόγο, τα Κεφάλαια 3 ως 6 είναι αφιερωμένα στη μελέτη αυτή.



Εικόνα 3.1: Μια φωτογραφία με μεγάλο ιστορικό ενδιαφέρον: οι αδελφοί Wright εκτελούν την πρώτη επιτυχή επανδρωμένη πτήση αεροσκάφους στις 17 Δεκεμβρίου 1903.

Πηγή: NASA.



Εικόνα 3.2: Αεροπλάνο Seversky P-35.

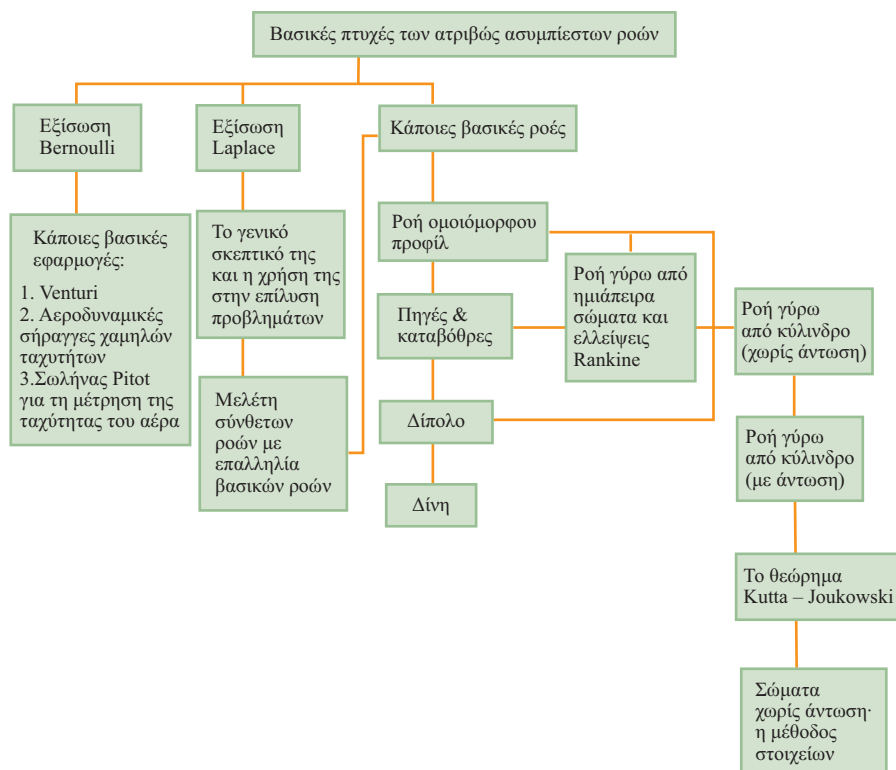
Πηγή: Πολεμική Αεροπορία των ΗΠΑ.

¹ Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την πρώτη πτήση των αδελφών Wright, σας παραπέμπουμε στην Αναφορά 2.



Εικόνα 3.3: Αεροσκάφος Cessna Model 425 Conquest.

Πηγή: Philip Nealey/Photodisc/Getty Images.



Εικόνα 3.4: Αεροπλάνο Seversky P-35.

Επιπλέον, στα κεφάλαια αυτά δεν θα λαμβάνουμε υπ' όψιν την επίδραση της τριβής, της θερμικής αγωγιμότητας και της διάχυσης, ώστε η ροή εκτός από ασυμπίεστη να είναι και ατρίβης². Με βάση την Εικόνα 1.45, το αντικείμενο των Κεφαλαίων 3 ως 6 καλύπτει συνδυαστικά τα μπλοκ D και E.

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η διατύπωση κάποιων βασικών σχέσεων, οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν σε ατρίβεις και ασυμπίεστες ροές και η μελέτη κάποιων απλών αλλά σημαντικών πεδίων ροής. Κατέχοντας όλη αυτή τη γνώση, θα μπορούμε μετά να μελετήσουμε τη θεωρία αεροτομών (στο Κεφάλαιο 4) και τη θεωρία των περυγών πεπερασμένου εκπετάσματος (στο Κεφάλαιο 5).

Ο Οδικός Χάρτης του παρόντος κεφαλαίου δίνεται στην Εικόνα 3.4. Ο Χάρτης περιλαμβάνει 3 βασικούς οδικούς άξονες:

1. την κατάστρωση της εξίσωσης Bernoulli και κάποιων άμεσων εφαρμογών της
2. τη μελέτη της εξίσωσης Laplace, η οποία είναι η θεμελιώδης εξίσωση που διέπει τις ατρίβεις, ασυμπίεστες και αστρόβιλες ροές

² Ένα ατρίβες και ασυμπίεστο ρευστό απαντάται και ως τέλειο ρευστό. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε εδώ αυτό τον όρο, ώστε να αποφευχθεί η οποιαδήποτε σύγχυση με τον όρο τέλειο αέριο της Θερμοδυναμικής. Προσωπικά, προτιμώ τον πιο ακριβή και περιγραφικό όρο ατρίβης και ασυμπίεστη ροή, παρά τον όρο «τέλειο ρευστό».

3. την παρουσίαση κάποιων βασικών μοτίβων ροής, το πώς αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν με βάση την αρχή της υπέρθεσης, ώστε να εξαχθούν τα μοτίβα ροής με και χωρίς άντωση γύρω από έναν κύλινδρο, αλλά και το πώς αυτά αποτελούν τη βάση για μια γενική αριθμητική τεχνική, την τεχνική στοιχείων πηγών για την επίλυση ροών γύρω από ένα σώμα οποιουδήποτε σχήματος.

Μην ξεχνάτε, κατά τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού, να ανατρέχετε συχνά στον Οδικό Χάρτη, ώστε να διατηρείτε τον «προσανατολισμό» σας και να είστε σε θέση να κατανοείτε το πώς σχετίζονται μεταξύ τους τα διάφορα εδάφια.

3.2. Η εξίσωση Bernoulli

Όπως θα δούμε στο εδάφιο 3.19, η άνθηση της θεωρητικής Μηχανικής των Ρευστών κατά τις πρώτες δεκαετίες του 18ου αιώνα οφείλεται στην εργασία των Johann και Daniel Bernoulli και ιδίως του Leonhard Euler. Τότε, για πρώτη φορά κατέστη εφικτή η κατανόηση της σχέσης μεταξύ πίεσης και ταχύτητας σε μια ατρίβη ασυμπίεστη ροή:

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{const.}$$

Αν και η παραπάνω σχέση πρωτοπαρουσιάστηκε (σε αυτή τη μορφή) από τον Euler (βλ. εδάφιο 3.19), είναι γνωστή ως **εξίσωση Bernoulli** (Bernoulli equation) και αναμφίβολα αποτελεί την πιο γνωστή εξίσωση της Μηχανικής των Ρευστών· σκοπός του παρόντος εδαφίου είναι να καταστρώσουμε την εξίσωση Bernoulli με τη βοήθεια των γενικών εξισώσεων που διατυπώσαμε στο Κεφάλαιο 2.

Ας θεωρήσουμε την κατά x συνιστώσα της εξίσωσης ορμής, όπως αυτή δίνεται από την Εξίσωση {2.113α}. Υπό συνθήκες ατρίβους ροής και χωρίς μαζικές δυνάμεις, η εξίσωση αυτή γράφεται ως:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \{3.1\}$$

Υπό συνθήκες μόνιμης ροής, μηδενίζεται η παράγωγος $\partial u / \partial t$, οπότε η {3.1} γράφεται εκ νέου ως:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \{3.2\}$$

Πολλαπλασιάζοντας την {3.2} με dx , προκύπτει:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dx + w \frac{\partial u}{\partial z} dx = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad \{3.3\}$$

Θεωρούμε τώρα τη ροή κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής στον 3Δ χώρο. Η εξίσωση της ροϊκής γραμμής δίνεται από τις {2.117α}, {2.117β} και {2.117γ}. Αντικαθιστώντας τις παραστάσεις:

$$udz - wdx = 0 \quad \{2.117\beta\}$$

και:

$$vdx - udy = 0 \quad \{2.117\gamma\}$$

στην Εξίσωση {3.3}, προκύπτει:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} dx + u \frac{\partial u}{\partial y} dy + u \frac{\partial u}{\partial z} dz = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad \{3.4\}$$

ή:

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad \{3.5\}$$

Όπως γνωρίζουμε από τον Λογισμό Πολλών Μεταβλητών, το διαφορικό της συνάρτησης $u = u(x,y,z)$ δίνεται από τη σχέση:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Η παραπάνω σχέση είναι ακριβώς η παράσταση εντός της παρένθεσης της Εξίσωσης {3.5}, ώστε αυτή να μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$u du = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \Rightarrow \frac{1}{2} d(u^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad \{3.6\}$$

Με παρόμοιο τρόπο και με βάση τις κατά y και z συνιστώσες της εξίσωσης ορμής (βλ. Εξισώσεις {2.113β} και {2.113γ}, αντιστοίχως) μπορούμε, πάντα υπό συνθήκες ατρίβους και μόνιμης ροής, να καταλήξουμε στις σχέσεις:

$$\frac{1}{2} d(v^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad \{3.7\}$$

και:

$$\frac{1}{2} d(w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad \{3.8\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις Εξισώσεις {3.6} ως {3.8}, προκύπτει:

$$\frac{1}{2} d(u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \quad \{3.9\}$$

Όμως, είναι:

$$u^2 + v^2 + w^2 = V^2 \quad \{3.10\}$$

και:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp \quad \{3.11\}$$

Αντικαθιστώντας τις {3.10} και {3.11} στην {3.9}, έχουμε:

$$\frac{1}{2} d(V^2) = -\frac{dp}{\rho} \Rightarrow dp = -\rho V dV \quad \{3.12\}$$

Η Εξίσωση {3.12} είναι γνωστή ως **εξίσωση Euler** (Euler's equation) και μπορεί να εφαρμοστεί σε ατρίβεις ροές χωρίς μαζικές δυνάμεις, συνδέοντας τη μεταβολή της ταχύτητας dV κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής με τη μεταβολή της πίεσης dp κατά μήκος της ίδιας ροϊκής γραμμής.

Η Εξίσωση {3.12} στην περίπτωση της ασυμπίεστης μορφής μετασχηματίζεται σε μια πολύ χρηστική μορφή. Για $\rho = \text{const.}$, η εξίσωση Euler μπορεί να ολοκληρωθεί μεταξύ των σημείων 1 και 2 που κείνται επί της ίδιας ροϊκής γραμμής:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho \int_{V_1}^{V_2} V dV \Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 \quad \{3.13\}$$

Η {3.13} αποτελεί την **εξίσωση Bernoulli** (Bernoulli's equation), η οποία συνδέει την πίεση και την ταχύτητα στο σημείο 1 μιας ροϊκής γραμμής με την πίεση και την ταχύτητα στο σημείο 2 της ίδιας ροϊκής γραμμής. Η εξίσωση Bernoulli μπορεί να διατυπωθεί εναλλακτικά ως:

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{const.} \text{ (κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής)} \quad \{3.14\}$$

Κατά την κατάστροση των Εξισώσεων {3.13} και {3.14}, δεν κάναμε κάποια αναφορά σχετικά με το αν η ροή είναι αστρόβιλη ή στροβιλή· οι εξισώσεις αυτές ισχύουν σε κάθε περίπτωση. Για μια γενική στροβιλή ροή, η τομή της σταθεράς στην {3.14} θα μεταβάλλεται από τη μια ροϊκή γραμμή στην άλλη. Αν, όμως, η ροή είναι αστρόβιλη, η εξίσωση Bernoulli μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε δύο σημεία της ροής και όχι απαραίτητα σε δύο σημεία που κείνται επί της ίδιας ροϊκής γραμμής. Ειδικά, λοιπόν, για την περίπτωση αστρόβιλης ροής, η σταθερά της {3.14} είναι κοινή για όλες της ροϊκές γραμμές:

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{const.} \text{ (σε όλο το πεδίο ροής)} \quad \{3.15\}$$

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης αφήνεται ως άσκηση (βλ. Πρόβλημα 3.1).

Η φυσική σημασία της εξίσωσης Bernoulli καθίσταται προφανής από τις Εξισώσεις {3.13}, {3.14} και {3.15}: όταν η ταχύτητα αυξάνεται, τότε η πίεση μειώνεται· αντίστοιχα, όταν η ταχύτητα μειώνεται, τότε η πίεση αυξάνεται.

Η εξίσωση Bernoulli προέκυψε μέσω της εξίσωσης ορμής, συνεπώς συνιστά μια διατύπωση του 2^{ου} Νόμου του Νεύτωνα για μια ατρίβη και ασυμπίεστη ροή χωρίς μαζικές δυνάμεις. Παρατηρούμε ότι οι διαστάσεις των Εξισώσεων {3.13}, {3.14} και {3.15} είναι πίεση ή ενέργεια ανά μονάδα όγκου (ο όρος $\rho V^2/2$ αποτελεί

την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου), συνεπώς η εξίσωση Bernoulli αποτελεί μια σχέση για τη μηχανική ενέργεια σε μια ασυμπίεστη ροή, εξισώνοντας το έργο που παράγεται από τις δυνάμεις λόγω πίεσης με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της ροής. Πράγματι, η εξίσωση Bernoulli μπορεί να εξαχθεί και μέσω της γενικής εξίσωσης ενέργειας, όπως είναι η {2.114}· η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. Το γεγονός ότι η εξίσωση Bernoulli μπορεί να ερμηνευτεί είτε ως μια διατύπωση του 2ου Νόμου του Νεύτωνα είτε ως μια διατύπωση της εξίσωσης ενέργειας καταδεικνύει το γεγονός ότι η εξίσωση ενέργειας δεν είναι απαραίτητη για την ανάλυση μιας ατρίβους ασυμπίεστης ροής· για τέτοιες ροές, αρκεί η εφαρμογή των εξισώσεων συνέχειας και ορμής (στο σημείο αυτό, σας συμβουλεύουμε να κάνετε μια επανάληψη στα εισαγωγικά σχόλια του εδαφίου 2.7).

Η στρατηγική επίλυσης των περισσότερων προβλημάτων που άπτονται των ατρίβων και ασυμπίεστων ροών είναι:

1. διατύπωση του πεδίου ταχύτητας, βάσει των εξισώσεων που διέπουν τη ροή. Οι εξισώσεις αυτές, για την περίπτωση ατρίβους και ασυμπίεστης ροής, εξετάζονται στα εδάφια 3.6 και 3.7.
2. με γνωστό το πεδίο ταχύτητας, καταστρώνουμε το πεδίο πίεσης με βάση την εξίσωση Bernoulli.

Εντούτοις, προτού ασχοληθούμε με τη γενική μέθοδο επίλυσης τέτοιων ροών (βλ. εδάφιο 3.7), αξίζει τον κόπο να εφαρμόσουμε την εξίσωση συνέχειας και την εξίσωση Bernoulli σε αεραγωγούς (βλ. εδάφιο 3.3) και στη μέτρηση της ταχύτητας αεροσκαφών, με χρήση σωλήνα Pitot (βλ. εδάφιο 3.4).

Παράδειγμα 3.1

Μελετάμε μια αεροτομή στην επιφάνεια της θάλασσας, η οποία περιβάλλεται από μια ροή με ταχύτητα ελεύθερης ροής 50 m/s. Σε ένα δεδομένο σημείο της αεροτομής, η πίεση είναι 0,9 bar. Να υπολογίσετε την ταχύτητα στο σημείο αυτό.

Λύση

Η πυκνότητα του αέρα στην επιφάνεια της θάλασσας είναι $\rho_\infty = 1,23 \text{ kg/m}^3$ και η πίεση είναι $p_\infty = 1,01 \text{ bar}$. Έτσι, έχουμε:

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = p + \frac{1}{2} \rho V^2$$

οπότε η ζητούμενη ταχύτητα είναι ίση με:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_\infty - p)}{\rho} + V_\infty^2} = \sqrt{\frac{2[(1,01 - 0,9) \cdot 10^5]}{1,23} + (50)^2} = 142,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Παράδειγμα 3.2

Μελετάμε μια ατρίβη και ασυμπίεστη ροή αέρα κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής. Η πυκνότητα του αέρα είναι σταθερή και ίση με $1,225 \text{ kg/m}^3$ (δηλαδή, ίση με την πυκνότητα του αέρα υπό συνθήκες τυπικής ατμόσφαιρας). Στο σημείο 1 της ροϊκής γραμμής, η πίεση και η ταχύτητα του αέρα είναι ίσες με 101,3 kPa και 3 m/s, αντιστοίχως, ενώ στο σημείο 2 (κατάντη του σημείου 1) η ταχύτητα είναι 57 m/s. Να υπολογίσετε την πίεση στο σημείο 2 και να σχολιάσετε τη σχετική μεταβολή της πίεσης μεταξύ των δύο σημείων σε σχέση με την αντίστοιχη μεταβολή της ταχύτητας.

Λύση

Σύμφωνα με την Εξίσωση {3.13} είναι:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

οπότε η ζητούμενη πίεση είναι ίση με:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho (V_1^2 - V_2^2) \\ &= (101,3 \cdot 10^3) + \frac{1}{2} \cdot (1,225) \cdot [(3)^2 - (57)^2] \\ &= 99,3 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς η ταχύτητα αυξάνεται από 3 m/s σε 57 m/s κατά μήκος της ροϊκής γραμμής, η πίεση μειώνεται από 101,3 kPa σε 99,3 kPa, δηλαδή μια αύξηση της ταχύτητας κατά 19 φορές οδηγεί σε μείωση της πίεσης κατά μόλις $\frac{101,3 - 99,3}{101,3} = 1,97\%$. Αντίστροφα, μια μείωση της πίεσης κατά 2% οδηγεί σε αύξηση της ταχύτητας κατά 1900%. Το Παράδειγμα είναι ενδεικτικό των ροών χαμηλών ταχυτήτων: απαιτείται ελάχιστη μεταβολή της πίεσης, προκειμένου να επιτευχθεί μια έντονη μεταβολή της ταχύτητας. Αυτό είναι κάτι που το αντιλαμβανόμαστε και βάσει της καθημερινής μας πείρας: αρκεί μια πολύ μικρή βαρομετρική μεταβολή από ένα σημείο σε ένα άλλο για να προκληθούν ισχυροί άνεμοι. ■

3.3. Ασυμπίεστη ροή σε αεραγωγό: ο σωλήνας Venturi και η αεροδυναμική σήραγγα χαμηλών ταχυτήτων

Ας θεωρήσουμε μια ροή μέσω ενός αεραγωγού, όπως στην Εικόνα 3.5. Γενικά, ο αεραγωγός θα έχει 3Δ σχήμα, κυκλικής ή ελλειψοειδούς ή ορθογωνικής διατομής, το εμβαδόν της οποίας μπορεί να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Η ροή μέσω του αεραγωγού αυτού θα είναι 3Δ και, μιλώντας από μια αυστηρή σκοπιά, θα πρέπει να αναλυθεί με βάση τις 3Δ εξισώσεις διατήρησης, όπως αυτές διατυπώθηκαν στο Κεφάλαιο 2. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις η μεταβολή του εμβαδού $A = A(x)$ κινείται σε μέτρια πλαίσια, ώστε να μας επιτρέπεται η προσέγγιση ότι οι ιδιότητες του πεδίου ροής είναι ομοιόμορφες σε κάθε διατομή, άρα ότι μεταβάλλονται μόνο κατά τη διεύθυνση x . Η ροή στο σημείο 1 της Εικόνας 3.5 είναι ομοιόμορφη, ενώ επίσης ομοιόμορφη (αλλά με διαφορετικά χαρακτηριστικά) είναι και η ροή στο σημείο 2 της ίδιας εικόνας. Μια τέτοια ροή, όπου η διατομή του αεραγωγού μεταβάλλεται συναρτήσει του x και όλες οι μεταβλητές που περιγράφουν τη ροή μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις αποκλειστικά του x , δηλαδή να είναι $A = A(x)$, $V = V(x)$, $p = p(x)$ κ.λπ., καλείται **ψευδομονοδιάστατη ροή** (quasi-one-dimensional flow). Παρά το γεγονός ότι μια ψ1Δ ροή είναι προσέγγιση της πραγματικής 3Δ ροής στον αεραγωγό, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την παραδοχή της είναι αρκετών ακριβή για πολλές αεροδυναμικές εφαρμογές. Οι υπολογισμοί που αφορούν στις ψ1Δ ροές, οι οποίοι αποτελούν μια συνήθη προσέγγιση σε τεχνικές εφαρμογές, αποτελούν το αντικείμενο του παρόντος εδαφίου.

Η ολοκληρωτική διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad \{3.48\}$$

υπό συνθήκες μόνιμης ροής γράφεται ως:

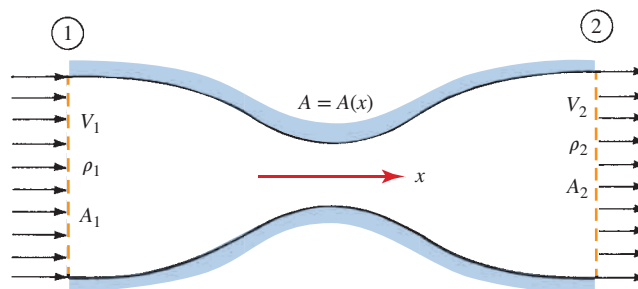
$$\iint_S \rho (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad \{3.16\}$$

Με εφαρμογή της Εξίσωσης {3.16} στον αεραγωγό της Εικόνας 2.5 και ορίζοντας έναν όγκο ελέγχου που οριοθετείται από τις διατομές A_1 , A_2 και τα τοιχώματα του αεραγωγού, έχουμε:

$$\iint_{A_1} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{S}) + \iint_{A_2} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{S}) + \iint_{\text{wall}} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad \{3.17\}$$

Κατά μήκος των τοιχωμάτων, η ταχύτητα είναι εφαπτομενική προς αυτά. Με δεδομένο, λοιπόν, ότι εξ ορισμού το διάνυσμα $d\vec{S}$ είναι κάθετο προς τα τοιχώματα, το εσωτερικό γινόμενο $\vec{V} \cdot d\vec{S}$ θα είναι μηδενικό, οπότε:

$$\iint_{\text{wall}} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad \{3.18\}$$



Εικόνα 3.5: Ψευδομονοδιάστατη ροή σε αεραγωγό.

Στη διατομή 1, η ροή είναι ομοιόμορφη εφ' όλης της επιφάνειας αυτής. Εδώ, τα διανύσματα $\vec{dS}$ και $\vec{V}$ είναι αντίρροπα (για και το διάνυσμα $\vec{dS}$ δείχνει εξ ορισμού προς τα έξω από τον όγκο ελέγχου), άρα:

$$\iint_{A_1} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{dS}) = -\rho_1 A_1 V_1 \quad \{3.19\}$$

Στη διατομή 2, η ροή είναι επίσης ομοιόμορφη εφ' όλης της επιφάνειας αυτής. Με δεδομένο ότι τα διανύσματα $\vec{dS}$ και $\vec{V}$ είναι ομόρροπα, έχουμε:

$$\iint_{A_2} \rho (\vec{V} \cdot \vec{dS}) = \rho_2 A_2 V_2 \quad \{3.20\}$$

Αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις {3.18}, {3.19} και {3.20} στην {3.17}, λαμβάνουμε:

$$-\rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2 + 0 = 0 \Rightarrow \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \quad \{3.21\}$$

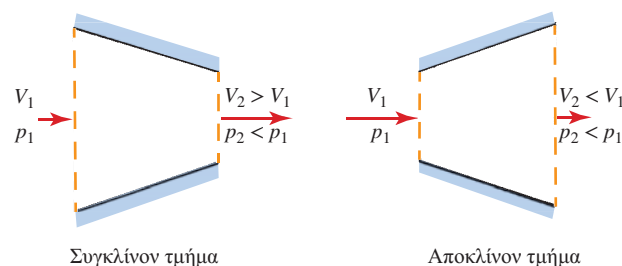
Η Εξίσωση {3.21} αποτελεί την ψ1Δ διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας και μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε συμπίεστες όσο και σε ασυμπίεστες ροές³. Από φυσικής άποψης, η {3.21} δηλώνει ότι η παροχή μάζας μέσω του αεραγωγού είναι σταθερή (δηλαδή, η ποσότητα που εισέρχεται είναι ίση με την ποσότητα που εξέρχεται). Μπορείτε να ανατρέξετε στην {2.48} και να τη συγκρίνετε με την {3.21}.

Για την ειδική περίπτωση της ασυμπίεστης ροής, όπου $\rho = \text{const.}$, στην Εξίσωση {3.21} θα είναι $\rho_1 = \rho_2$, οπότε:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad \{3.22\}$$

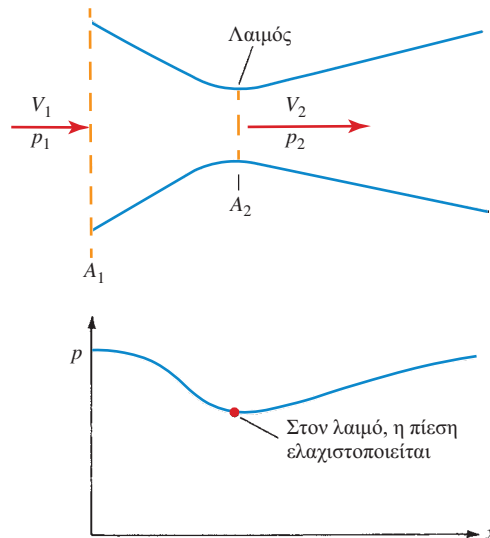
Η παραπάνω σχέση αποτελεί την ψ1Δ διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας σε ασυμπίεστες ροές. Από φυσικής άποψης, δηλώνει ότι η παροχή όγκου μέσω του αεραγωγού θα είναι σταθερή. Από την {3.22}, παρατηρούμε ότι όταν η διατομή του αεραγωγού μειώνεται (σε κάποιο συγκλίνον τμήμα), τότε η ταχύτητα αυξάνεται· αντίστροφα, η ταχύτητα μειώνεται όταν διατομή του αεραγωγού αυξάνεται (σε κάποιο αποκλίνον τμήμα). Οι θεμελιώδεις αυτές συνέπειες της εξίσωσης συνέχειας σε ασυμπίεστες ροές δίνονται σχηματικά στην Εικόνα 3.6 και θα πρέπει να τις κατανοήσετε καλά. Επιπλέον, βάσει της εξίσωσης Bernoulli, συνάγεται ότι όταν η ταχύτητα αυξάνεται σε ένα συγκλίνοντα αεραγωγό, τότε η πίεση μειώνεται, ενώ όταν η ταχύτητα μειώνεται σε ένα συγκλίνοντα αεραγωγό, τότε η πίεση αυξάνεται, όπως μπορείτε να δείτε και στην Εικόνα 3.6.

Ας μελετήσουμε, τώρα, μια ροή μέσα από τον συγκλίνοντα – αποκλίνοντα αεραγωγό της Εικόνας 3.7. Η ροή εισέρχεται στον αεραγωγό υπό πίεση p_1 και με ταχύτητα V_1 . Στο συγκλίνον τμήμα, η ταχύτητα αυξάνεται, μέχρι μιας μέγιστης τιμής της (V_2) στην ελάχιστη διατομή του αεραγωγού, τον λεγόμενο **λαιμό** (throat). Ταυτόχρονα, κατά μήκος του συγκλίνοντος τμήματος η πίεση μειώνεται, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.7, μέχρι να ελαχιστοποιηθεί (p_2) στον λαιμό. Στο αποκλίνον τμήμα (κατάντη του λαιμού), η ταχύτητα μειώνεται και η πίεση αυξάνεται. Το σύστημα της Εικόνας 3.7 καλείται *venturi* και πρόκειται για μια συσκευή με ποικίλες τεχνικές εφαρμογές, η δε χρήση του ανάγεται στις αρχές του 20ού αιώνα. Το βασικό χαρακτηριστικό του venturi είναι ότι η πίεση p_2 στον λαιμό είναι χαμηλότερη από την πίεση περιβάλλοντος p_1 . Αυτή η διαφορά πίεσης $p_1 - p_2$ είναι το σημείο κλειδί για τη λειτουργία πολλών συστημάτων. Για παράδειγμα, τα καρμπυρατέρ των αυτοκινήτων πιο παλιάς τεχνολογίας έφεραν ένα venturi, κατά μήκος του οποίου ο αέρας αναμειγνυόταν με το καύσιμο για να σχηματίσει το κατάλληλο μείγμα αέρα – καυσίμου. Το σωληνάκι μεταφοράς του καυσίμου τελείωνε στο venturi, όντας ανοιχτό εκεί. Επειδή η πίεση p_2 είναι μικρότερη από την ατμοσφαιρική πίεση p_1 , η διαφορά πίεσης $p_1 - p_2$ εξωθούσε το καύσιμο προς το ρεύμα του αέρα και το αναμείγνυε με τον αέρα (κατάντη του λαιμού).



Εικόνα 3.6: Ασυμπίεστη ροή σε αεραγωγό.

³ Η παραπάνω απόδειξη είναι αρκετά αυστηρή και συμβατή με τη γενική ολοκληρωματική διατύπωση· για μια πιο πρόχειρη παρουσίαση του τρόπου εξαγωγής της Εξίσωσης {3.21}, σας παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 4 της Αναφοράς 2.



Εικόνα 3.7: Ροή μέσω ενός venturi.

Μια (αεροδυναμικού ενδιαφέροντος) εφαρμογή των venturi είναι η μέτρηση της ταχύτητας των αεροσκαφών. Ας θεωρήσουμε ένα venturi με δεδομένο λόγο διατομών A_1/A_2 , όπως αυτό της Εικόνας 3.7, το οποίο τοποθετείται σε ένα ρεύμα αέρα άγνωστης ταχύτητας V_1 : αυτή η άγνωστη ταχύτητα θα προσδιοριστεί με το venturi. Ο πιο άμεσος τρόπος προσδιορισμού της ταχύτητας είναι μέσω της διαφοράς πίεσης $p_1 - p_2$, η οποία μπορεί να μετρηθεί εγκαθιστώντας αναμονές πίεσης στον λαίμο και στην είσοδο του venturi, που με τη σειρά τους θα συνδεθούν σε μετρητικά πίεσης ή στα δύο ανοίγματα ενός υοειδούς μανομέτρου (βλ. εδάφιο 1.9). Με αυτό τον τρόπο, η διαφορά πίεσης μπορεί να μετρηθεί άμεσα και να αναχθεί στην άγνωστη ταχύτητα V_1 με τη βοήθεια της εξίσωσης Bernoulli (βλ. Εξίσωση {3.13}):

$$V_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_2 - p_1) + V_2^2 \quad \{3.23\}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας (βλ. Εξίσωση {3.22}), είναι:

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 \quad \{3.24\}$$

Αντικαθιστώντας την {3.24} στην {3.23} προκύπτει:

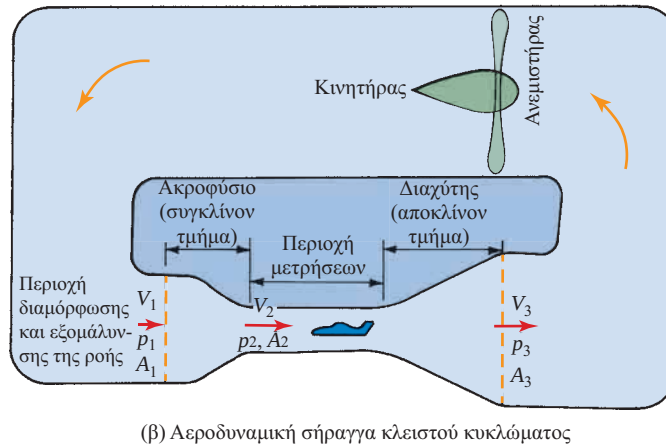
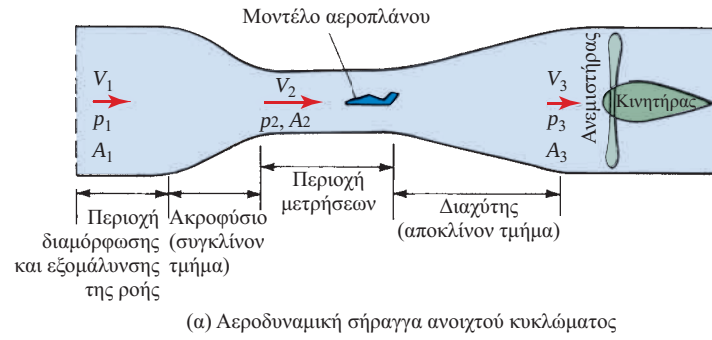
$$V_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_2 - p_1) + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \cdot V_1^2 \quad \{3.25\}$$

οπότε με επίλυση της {3.25} ως προς V_1 , λαμβάνουμε τη ζητούμενη ταχύτητα:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}} \quad \{3.26\}$$

Η Εξίσωση {3.26} αποτελεί την έκφραση της άγνωστης ταχύτητας V_1 συναρτήσει της (μετρούμενης) διαφοράς πίεσης $p_1 - p_2$ και των (γνωστών) λόγου πίεσης και πυκνότητας. Ακριβώς με αυτό τον τρόπο, είναι δυνατή η μέτρηση της ταχύτητας των αεροσκαφών. Πράγματι, η πρώτη επιτυχής εγκατάσταση μέτρησης ταχύτητας σε αεροσκάφος ήταν ένα venturi που τοποθέτησε ο Γάλλος πιλότος A. Eteve κατά τον Ιανουάριο το 1911, δηλαδή περισσότερα από 7 χρόνια μετά την πρώτη πτήση των αδελφών Wright. Σήμερα, η μέτρηση της ταχύτητας των αεροσκαφών γίνεται συνήθως με σωλήνες Pitot (τους οποίους θα μελετήσουμε στο εδάφιο 3.4): ωστόσο, δεν είναι σπάνιο να βρείτε συστήματα venturi για τη μέτρηση της ταχύτητας κάποιων μικρών αεροσκαφών και ιδιοκατασκευασμένων αεροσκαφών.

Μια άλλη εφαρμογή των ασυμπίεστων ροών σε αεραγωγούς είναι η αεροδυναμική σήραγγα χαμηλών ταχυτήτων. Κατά το 1871, ο Βρετανός Francis Wenham κατασκευάζει και λειτουργεί την πρώτη αεροδυναμική σήραγγα στην ιστορία, μέσω της οποίας υλοποιείται ο στόχος για την κατασκευή μιας πειραματικής διάτα-



Εικόνα 3.8: (α) Αεροδυναμική σήραγγα ανοιχτού κυκλώματος. (β) Αεροδυναμική σήραγγα κλειστού κυκλώματος.

ξης στο έδαφος που θα επέτρεπε την παραγωγή ροής αέρα σε εργαστηριακή κλίμακα για την προσομοίωση των συνθηκών πτήσης⁴. Από το 1871 ως και τα μέσα της δεκαετίας του 1930, σχεδόν όλες οι αεροδυναμικές σήραγγες παρήγαγαν ροές αέρα ταχύτητας ως και 400 km/h. Τέτοιες σήραγγες λειτουργούν και σήμερα και χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό, ταυτόχρονα δε, λειτουργούν και σήραγγες διηχητικών, υπερηχητικών και υπερ-υπερηχητικών ροών. Εδώ θα μελετήσουμε τις αεροδυναμικές σήραγγες χαμηλών ταχυτήτων.

Πρακτικά, μια αεροδυναμική σήραγγα χαμηλών ταχυτήτων δεν είναι παρά ένα μεγάλο venturi, με τη ροή του αέρα να οδηγείται από ένα μεγάλο ανεμιστήρα. Τα πτερύγια του ανεμιστήρα είναι όμοια με εκείνα των ελίκων των αεροσκαφών και είναι σχεδιασμένα ώστε να κυκλοφορούν τον αέρα στο κύκλωμα της σήραγγας, η οποία μπορεί να είναι (βλ. Εικόνα 3.8) είτε ανοιχτού κυκλώματος (με τον αέρα να αναρροφάται από την ατμόσφαιρα και να απάγεται ξανά σε αυτήν) είτε κλειστού κυκλώματος (με τον αέρα να κυκλοφορεί συνεχώς μέσα στη σήραγγα. Σε κάθε περίπτωση, στο ακροφύσιο εισέρχεται (σε διατομή A_1) ρεύμα αέρα υπό πίεση p_1 και χαμηλή ταχύτητα V_1 . Το ακροφύσιο συγκλίνει προς μια μικρότερη διατομή A_2 , οδηγώντας τον αέρα στην περιοχή μετρήσεων με αυξημένη ταχύτητα V_2 και μειωμένη πίεση p_2 . Αφού διέλθει γύρω από το μοντέλο που μετρείται (το οποίο μπορεί να είναι μοντέλο είτε ενός πλήρους αεροσκάφους είτε κάποιου τμήματος αυτού, π.χ. πτέρυγα, κινητήρας, ουρά, καμπίνα, κ.λπ.), ο αέρας διοχετεύεται στον διαχύτη, ο οποίος δεν είναι παρά ένας αποκλίνων αεραγωγός: στην έξοδο του διαχύτη, διατομής A_3 , η ταχύτητα μειώνεται σε V_3 και η πίεση αυξάνεται σε p_3 . Σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας (βλ. Εξίσωση {3.22}), η ταχύτητα του αέρα στην περιοχή μετρήσεων είναι:

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 \quad \{3.27\}$$

και στην έξοδο του διαχύτη είναι:

$$V_3 = \frac{A_2}{A_3} \cdot V_2 \quad \{3.28\}$$

Στα διάφορα σημεία της σήραγγας, η πίεση συνδέεται με την ταχύτητα μέσω της εξίσωσης Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 = p_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2 \quad \{3.29\}$$

⁴ Για περισσότερα στοιχεία σχετικά με την ιστορία των αεροδυναμικών σήραγγων, σας παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 4 της Αναφοράς 2.

Η ρύθμιση της ταχύτητας του αέρα στην περιοχή μετρήσεων μιας δεδομένης αεροδυναμικής σήραγγας επιτυγχάνεται μέσω της διαφοράς πίεσης $p_1 - p_2$. Αυτό μπορεί να γίνει πιο κατανοητό γράφοντας εκ νέου την Εξίσωση {3.29} στη μορφή:

$$V_2^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) + V_1^2 \quad \{3.30\}$$

Αντικαθιστώντας την {3.27} στην {3.31}, προκύπτει:

$$V_2^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 V_2^2 \quad \{3.31\}$$

οπότε με επίλυση της παραπάνω σχέσης ως προς V_2 , λαμβάνουμε τη ζητούμενη ταχύτητα στην περιοχή μετρήσεων:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}} \quad \{3.32\}$$

Ο λόγος διατομών A_2/A_1 είναι σταθερός σε κάθε δεδομένη αεροδυναμική σήραγγα, ενώ η πυκνότητα είναι σταθερή υπό συνθήκες ασυμπίεστης ροής. Έτσι, συνάγεται από την {3.32} ότι η ταχύτητα στην περιοχή μετρήσεων V_2 εξαρτάται μόνο από τη διαφορά πίεσης $p_1 - p_2$. Η διαφορά αυτή δημιουργείται από τον ανεμιστήρα που κινεί τον αέρα: όταν, λοιπόν, ρυθμίζεται η ισχύς του ανεμιστήρα, με έμμεσο τρόπο ρυθμίζεται η διαφορά πίεσης $p_1 - p_2$, άρα και η ταχύτητα (μέσω της {3.32}).

Στις αεροδυναμικές σήραγγες χαμηλών ταχυτήτων, ένας τρόπος μέτρησης της διαφοράς πίεσης $p_1 - p_2$, άρα και της ταχύτητας V_2 , είναι με χρήση μανομέτρων, όπως παρουσιάσαμε στο εδάφιο 1.9. Εργαζόμενοι με την Εξίσωση {1.56}, θα πρέπει να θυμόμαστε ότι η πυκνότητα είναι εκείνη του μανομετρικού υγρού **και όχι** εκείνη του αέρα στη σήραγγα: το γινόμενο της πυκνότητας με την επιτάχυνση της βαρύτητας g στην Εξίσωση {1.56} αποτελεί το βάρος ανά μονάδα όγκου του μανομετρικού υγρού, το οποίο καλείται **ειδικό βάρος** (weight per unit volume), w . Εις ό,τι αφορά στην Εξίσωση {1.56}, αν το ένα σκέλος του μανομέτρου (p_a) συνδεθεί με μια αναμονή πίεσης στην περιοχή διαμόρφωσης και εξομάλυνσης της ροής (όπου η πίεση είναι ίση με p_1) και το άλλο σκέλος με μια αναμονή πίεσης στην περιοχή μετρήσεων (όπου η πίεση είναι ίση με p_2), τότε από την {1.56} θα είναι:

$$p_1 - p_2 = w\Delta h$$

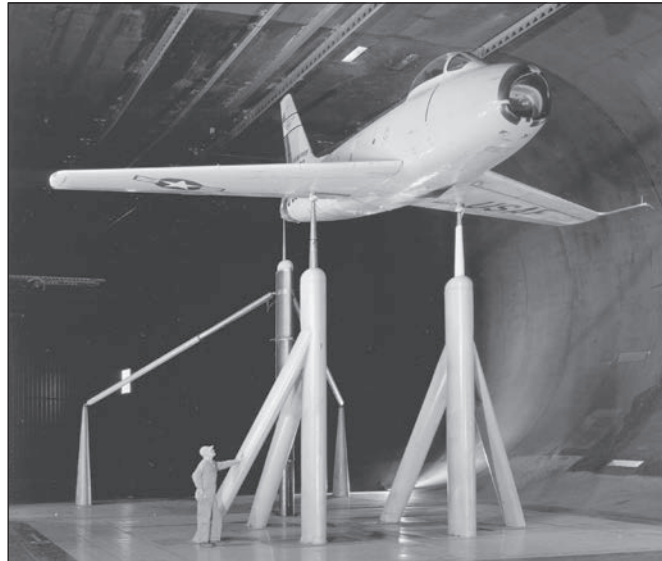
όπου Δh είναι η διαφορά στάθμης του μανομετρικού υγρού στα δύο σκέλη του μανομέτρου, ώστε {3.32} να μπορεί να αναδιατυπωθεί ως:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2w\Delta h}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}$$

Η χρήση μανομέτρων αποτελεί μια άμεση μηχανική μέθοδο μέτρησης πιέσεων. Πρόκειται για συσκευές που έχουν δοκιμαστεί στον χρόνο από το 1643, οπότε και εφευρέθηκαν από τον Ιταλό μαθηματικό Evangelista Torricelli. Ο Γάλλος μηχανικός Gustav Eiffel χρησιμοποίησε μανόμετρα για τη μέτρηση πιέσεων στην επιφάνεια των μοντέλων περυγών που δοκίμαζε στην αεροδυναμική του σήραγγα (Παρίσι, 1909), εγκαινιάζοντας τη χρήση των μανομέτρων στις αεροδυναμικές σήραγγες, που διατηρήθηκε για το μεγαλύτερο μέρος του 20ού αιώνα. Σήμερα, στις περισσότερες αεροδυναμικές σήραγγες τα μανόμετρα έχουν αντικατασταθεί από ηλεκτρονικά μετρητικά πίεσης. Όμως, το ενδιαφέρον μας για τα μανόμετρα δεν μπορεί να διακοπεί: πρόκειται για μετρητικά συστήματα που ώθησαν την εξέλιξη της Αεροδυναμικής και αποτελούν ένα πολύ καλό παράδειγμα εφαρμογής της Υδροστατικής.

Σε πολλές αεροδυναμικές σήραγγες χαμηλών ταχυτήτων, η περιοχή μετρήσεων είναι σε επαφή με την ατμόσφαιρα, μέσω θυρίδων στα τοιχώματά της, δηλαδή η περιοχή μετρήσεων δεν αποτελεί αεραγωγό αλλά μια ανοιχτή περιοχή ανάμεσα στην έξοδο του ακροφυσίου και την είσοδο του διαχύτη, ώστε στην περιοχή μετρήσεων να επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση (δηλαδή, $p_2 = 1 \text{ atm}$). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όταν ο αέρας μιας υποηχητικής ροής έρθει σε επαφή με αέρα περιβάλλοντος, τότε «εκτονώνεται» στην ατμοσφαιρική πίεση, κάτι που δεν συμβαίνει σε καμία περίπτωση με ένα ρεύμα υπερηχητικής ροής (εκεί, η πίεση της ροής μπορεί να είναι πολύ διαφορετική από την πίεση του «περιβάλλοντος» αέρα, όπως θα εξετάσουμε στο Κεφάλαιο 10).

Θα πρέπει να έχουμε υπ' όψιν μας ότι οι βασικές εξισώσεις που χρησιμοποιήσαμε σε αυτό το εδάφιο παρουσιάζουν κάποιους συγκεκριμένους περιορισμούς, μια και θεωρήσαμε $\psi 1\Delta$ ατριβή ροή. Οι εξισώσεις αυτές



(α)



(β)

Εικόνα 3.9: (α) Περιοχή μετρήσεων μιας μεγάλης υποηχητικής αεροδυναμικής σήραγγας. (β) Ο ανεμιστήρας της μεγάλης υποηχητικής αεροδυναμικής σήραγγας.

Πηγή: NACA/NASA.

ενδέχεται να οδηγήσουν σε εσφαλμένα και παραπλανητικά αποτελέσματα, όταν τα φαινόμενα που αμελήθηκαν κατά τις παραδοχές έχουν κάποια ιδιαίτερη σημασία εδώ. Για παράδειγμα, αν η διατομή της εισόδου της σήραγγας είναι ίδια με εκείνη της εξόδου της, δηλαδή $A_1 = A_3$, τότε από τις Εξισώσεις {3.27} και {3.28} θα πρέπει να ισχύει $V_3 = V_1$ και από την {3.29} να ισχύει $p_3 = p_1$, δηλαδή καθ' όλο το μήκος του κυκλώματος της σήραγγας να μην υφίσταται κάποια διαφορά πίεσης. Αν όντως ίσχυε κάτι τέτοιο, η σήραγγα θα μπορούσε να λειτουργήσει και χωρίς την τροφοδοσία κάποιας εξωτερικής ισχύος, δηλαδή θα αποτελούσε ένα... αεικίνητο. Στην πραγματικότητα, οι τριβές στα τοιχώματα της σήραγγας και η οπισθέλκουσα που αναπτύσσεται στο υπό αξιολόγηση μοντέλο προκαλούν ενεργειακές απώλειες, τις οποίες η εξίσωση Bernoulli δεν λαμβάνει υπ' όψιν (θυμόμαστε ότι κατά την κατάστρωση της {3.29} θεωρήσαμε παραδοχή ατρίβους ροής). Έτσι, σε μια πραγματική αεροδυναμική σήραγγα θα υφίσταται κάποια πτώση πίεσης λόγω των τριβών και της οπισθέλκουσας στο μοντέλο, άρα θα είναι $p_3 < p_1$. Σκοπός του ανεμιστήρα της σήραγγας είναι να προσδίδει ισχύ στη ροή του αέρα, ώστε να αυξάνει την πίεση του αέρα που εξέρχεται από τον διαχύτη και είτε (βλ. Εικόνα 3.8α) να τον απάγει στην ατμόσφαιρα, είτε (βλ. Εικόνα 3.8β) να τον ανακυκλοφορεί προς την είσοδο του ακροφυσίου υπό υψηλότερη πίεση p_1 . Στην Εικόνα 3.9 δίνονται φωτογραφίες από κάποιες συνήθεις υποηχητικές αεροδυναμικές σήραγγες.

Παράδειγμα 3.3

Μελετάμε ένα venturi με λόγο διατομών λαιμού προς είσοδο ίσο με 0,8. Αυτό το venturi τοποθετείται σε μια ροή στην επιφάνεια της θάλασσας και καταγράφει διαφορά πίεσης (μεταξύ εισόδου και λαιμού) ίση με 335 Pa. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας στην είσοδο του Venturi;

Λύση

Η πυκνότητα του αέρα στην επιφάνεια της θάλασσας είναι $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, οπότε:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right]}} = \sqrt{\frac{2(335)}{(1,225) \left[\left(\frac{1}{0,8} \right)^2 - 1 \right]}} = 31,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Παράδειγμα 3.4

Μελετάμε ένα υποηχητική αεροδυναμική σήραγγα χαμηλών ταχυτήτων, με λόγο διατομών στο ακροφύσιο 12:1. Αν η ροή στην περιοχή μετρήσεων είναι υπό συνθήκες τυπικής ατμόσφαιρας και με ταχύτητα 50 m/s, να υπολογίσετε την υψομετρική διαφορά που θα αποκατασταθεί σε ένα υδραργυρικό υοειδές μανόμετρο, το ένα σκέλος του οποίου είναι συνδεδεμένο στην είσοδο του ακροφυσίου και το άλλο στην περιοχή μετρήσεων.

Λύση

Η πυκνότητα του αέρα στην επιφάνεια της θάλασσας είναι $\rho = 1,23 \text{ kg/m}^3$, οπότε από την Εξίσωση {3.32} προκύπτει:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho V^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (1,23) (50)^2 \left[1 - \left(\frac{1}{12} \right)^2 \right] = 1527 \text{ Pa}$$

Η διαφορά αυτή είναι ίση με:

$$p_1 - p_2 = w \Delta h$$

και με δεδομένο ότι η πυκνότητα του υδραργύρου είναι 13.600 kg/m^3 , τότε η ζητούμενη ένδειξη του μανομέτρου θα είναι:

$$\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{w} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{1527}{(13.600)(9,8)} = 0,01148 \text{ m}$$

Παράδειγμα 3.5

Μελετάμε ένα μοντέλο αεροσκάφους σε μια υποηχητική αεροδυναμική σήραγγα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.10. Ο λόγος διατομών του ακροφυσίου είναι 12:1 και ο μέγιστος συντελεστής άντωσης που αναπτύσσεται στο μοντέλο είναι 1,3. Το εμβαδόν της κάτοψης των περυγών του αεροσκάφους είναι $0,56 \text{ m}^2$ και η άντωση μετριέται με τη βοήθεια ενός μηχανικού συστήματος, το οποίο αντέχει μέγιστη δύναμη 4.500 N (δηλαδή, αν ασκηθεί σε αυτό δύναμη μεγαλύτερη των 4.500 N, τότε το σύστημα θα καταστραφεί). Κατά τη διάρκεια μια δοκιμής σε αυτό το μοντέλο, οι ερευνητές θέλουν να στρέφουν το μοντέλο κατά τρόπον ώστε να προσομοιώνονται όλες οι δυνατές γωνίες προσβολής. Να υπολογίσετε τη μέγιστη επιτρεπόμενη διαφορά πίεσης μεταξύ της περιοχής διαμόρφωσης της ροής και της περιοχής μετρήσεων, υπό την υπόθεση ότι στην περιοχή μετρήσεων επικρατούν συνθήκες τυπικής ατμόσφαιρας (δηλαδή, $\rho_\infty = 1,225 \text{ kg/m}^3$).

Λύση

Η μέγιστη άντωση παρατηρείται όταν μεγιστοποιείται ο συντελεστής άντωσης. Με δεδομένο ότι η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της άντωσης είναι 4.500N, η ταχύτητα της ελεύθερης ροής που προκαλεί αυτή την άντωση είναι:

$$L_{\max} = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S C_{L,\max} \Rightarrow V_\infty = \sqrt{\frac{2L_{\max}}{\rho_\infty S C_{L,\max}}} = \sqrt{\frac{2(4500)}{(1,225)(0,56) \cdot 1,3}} = 100,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Εικόνα 3.10: Τοποθέτηση μοντέλου αεροσκάφους στην περιοχή μετρήσεων μεγάλης υποχητικής αεροδυναμικής σήραγγας.

Πηγή: Jeff Caplan/NASA.

Από την Εξίσωση {3.32} μπορεί να προκύψει η ζητούμενη διαφορά πίεσης:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (1,225) (100,5)^2 \left[1 - \left(\frac{1}{12} \right)^2 \right] = 6145 \text{ Pa}$$

Παράδειγμα 3.6

1. Η ταχύτητα της ροής στην περιοχή μετρήσεων μιας υποχητικής αεροδυναμικής σήραγγας χαμηλών ταχυτήτων είναι 100 μίλια ανά ώρα. Η περιοχή μετρήσεων φέρει ανοιχτές θυρίδες προς την ατμόσφαιρα, όπου η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με 101 kPa, ενώ η πυκνότητα του αέρα είναι ίση με εκείνη του αέρα στην επιφάνεια της θάλασσας (δηλαδή, 1,23 kg/m³). Αν ο λόγος διατομών του ακροφυσίου είναι 10:10, να υπολογίσετε την πίεση στην περιοχή διαμόρφωσης της ροής.
2. Κατά πόσο πρέπει να αυξηθεί η πίεση στην περιοχή διαμόρφωσης της ροής, ώστε η ταχύτητα του αέρα στην περιοχή μετρήσεων να είναι 200 μίλια ανά ώρα; Να σχολιάσετε τη σχέση μεταξύ της μεταβολής της πίεσης και της μεταβολής της ταχύτητας για την επίτευξη αυτής της τιμής.

Λύση

(για το ερώτημα α)

Η ταχύτητα είναι εκπεφρασμένη σε μίλια ανά ώρα· πρόκειται για μια μη συνεπή μονάδα, γεγονός που καθιστά αναγκαία τη μετατροπή της σε m/s:

$$V_2 = 100 \frac{\text{mi}}{\text{hr}} = 100 \frac{\text{mi}}{\text{hr}} \left(1609 \frac{\text{m}}{\text{mi}} \right) \left(\frac{\text{h}}{3600 \text{s}} \right) = 44,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την Εξίσωση {3.31} υπολογίζουμε ότι:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho V^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (1,23) (44,7)^2 \left[1 - \left(\frac{1}{10} \right)^2 \right] = 1217 \text{ Pa}$$

επομένως η ζητούμενη τιμή της πίεσης στην περιοχή διαμόρφωσης της ροής είναι:

$$p_1 = p_2 + (1217 \text{ Pa}) = (101000 \text{ Pa}) + (1217 \text{ Pa}) = 102217 \text{ Pa} \approx 1,01 \text{ atm}$$

(για το ερώτημα β)

Υπό ταχύτητα 200 mi/hr = 89,4 m/s, η διαφορά πίεσης θα είναι:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho V^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (1,23) (89,4)^2 \left[1 - \left(\frac{1}{10} \right)^2 \right] = 4866 \text{ Pa}$$